BÀI TẬP 1
ÔN TẬP LẠI TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bài 1. (a) Với $0 < a < b$, ta xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{nếu } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i. Tìm tổng Darboux trên và tổng Darboux dưới của hàm f.

ii. Xét tính khả tích (theo nghĩa thông thường) của hàm f.

(b) Xét hàm số $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

i. Tìm tổng Darboux trên và tổng Darboux dưới của hàm g.

ii. Từ đó suy ra hàm g là khả tích và tính $\int_0^1 g(x)\, dx$.

Bài 2. Với mỗi số tự nhiên n, ký hiệu $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

(a) Tính W_0 và W_1.

(b) Tìm đẳng thức liên hệ giữa W_n và W_{n+2}.

(c) i. Xét tính đơn điệu của dãy $\{W_n\}_{n \geqslant 0}$ và của dãy $\{nW_nW_{n-1}\}_{n \geqslant 1}$.

ii. Chứng minh rằng $W_n \sim W_{n-1}$.

iii. Từ đó suy ra $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Bài 3. Với mỗi số tự nhiên n, m ta ký hiệu $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$.

(a) Kiểm tra lại các kết quả sau đây: $I_{m,n} = I_{n,m}$, $I_{1,n} = \frac{1}{n+1}$, $I_{2,2} = \frac{\pi^2}{16}$, $I_{2,3} = \frac{2}{15}$, $I_{2,4} = \frac{\pi}{32}$, $I_{3,3} = \frac{1}{12}$, $I_{3,4} = \frac{2}{35}$, $I_{4,4} = \frac{3\pi}{256}$, $I_{4,5} = \frac{8}{315}$.

(b) Chứng minh rằng

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right)}.$$

Bài 4. (a) Tính độ dài đường cong có phương trình trong tọa độ cực[1] là $r = \left(\sin \frac{\theta}{3}\right)^3$, $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$.

(b) Tính độ dài đường cong[2] có phương trình $x^3 + y^3 = 3xy$.

---

[0]Hàm Gamma: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha - 1} \, dx$, $\alpha > 0$.

[1]Độ dài cung $r = r(\theta)$ trong đó $\alpha \leq \theta \leq \beta$ là: $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} \, d\theta$.

[2]Nếu cung cho bởi tham số thì độ dài là $\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt$. Nếu cung cho bởi dạng hiện $y = y(x)$ thì độ dài là $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx$.