Bài Tập 2
Tích Phân Riemann Trên Hình Hộp

Bài 1. Giả sử $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}$.

Bài 2. Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích và $g = g$ khắp nơi trừ ra tại một số hữu hạn các điểm. Chứng minh rằng g khả tích trên A và $\int\limits_A f\,\mathrm{d}V = \int\limits_A g\,\mathrm{d}V$.

Bài 3. Cho hàm $f : A \to \mathbb{R}$ và phân hoạch $\mathcal{P}$ của A. Chứng minh rằng hàm f khả tích khi và chỉ khi với mọi hình hộp S của phân hoạch $\mathcal{P}$, hàm thu hẹp $f\,|_S$ của f trên S khả tích trên S và hơn nữa ta còn có $\int\limits_A f dV = \sum\limits_S \int\limits_S f\,|_S\, dV$.

Bài 4. Cho hàm $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ}, \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ, } y \text{ là số vô tỷ}, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ, } y \text{ là số hữu tỷ có dạng } \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f\,\mathrm{d}V = 0$.