

BÀI TẬP 3
TIÊU CHUẨN KHẢ TÍCH LEBESGUE

Bài 1. Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu. Chứng minh rằng tập hợp những điểm gián đoạn của f có độ đo không.

Bài 2. Chứng minh rằng đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ với $a < b$ không có độ đo không.

Bài 3. Cho hàm $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{nếu } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ 2 & \text{nếu } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Tìm $\omega(f, 0)$.

Bài 4. Chứng minh rằng hình hộp $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (trong đó $a_i < b_i$ với mọi $i = \overline{1, n}$) không thể có độ đo không.

Bài 5. Chứng minh rằng tập hợp bị chặn B có thể tích không khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại một số hữu hạn các hình hộp đóng (hoặc mở) phủ B và có tổng thể tích nhỏ hơn ε .

Bài 6. Chứng minh rằng nếu tập hợp B có thể tích không thì biên giới của nó cũng có thể tích không. Cho ví dụ về tập hợp bị chặn có độ đo không nhưng biên giới của nó không có độ đo không.

Bài 7. Cho ví dụ về tập bị chặn B có độ đo không nhưng tích phân $\int_A \chi_B dV$ không tồn tại.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu B là tập bị chặn có độ đo không và $\int_A \chi_B dV$ tồn tại thì giá trị tích phân đấy phải bằng không.

Bài 9. Chứng minh rằng nếu $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm không âm và $\int_A f dV = 0$ thì tập hợp $\{x : f(x) \neq 0\}$ có độ đo không.