

BÀI TẬP 5
ĐỊNH LÝ FUBINI

Bài 1. Hãy kiểm tra định lý Fubini đối với hàm $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ,} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ và } y \text{ vô tỷ,} \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q} \text{ là phân số tối giản và } y \text{ hữu tỷ.} \end{cases}$$

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích thì

$$\int_a^b dy \int_a^y f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_x^b f(x, y) dy.$$

Bài 3. Dùng định lý Fubini chứng minh định lý Steward về tính không phụ thuộc thứ tự khi lấy đạo hàm riêng, tức là $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nếu các đạo hàm này liên tục.

Bài 4. Giả sử $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ và $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Định nghĩa $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x) = \int_{[a_1, x] \times \cdots \times [a_n, x_n]} f dV$. Tìm đạo hàm $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ nếu x là điểm trong của hình hộp A .

Bài 5. Giả sử $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ là hàm liên tục. Đặt $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Chứng minh quy tắc Leibniz $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Bài 6. Giả sử A và B là các tập đo được Jordan trong \mathbb{R}^3 . Ký hiệu $A_c = \{(x, y) : (x, y, c) \in A\}$ và $B_c = \{(x, y) : (x, y, c) \in B\}$. Giả sử rằng với mỗi c thì A_c và B_c là các tập đo được Jordan và có cùng diện tích. Chứng minh rằng A và B có cùng thể tích.

Bài 7. Chứng minh rằng $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 y^y dy$.

Bài 8. Tính thể tích của vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng xy , mặt bên là các mặt phẳng $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, phía trên bởi paraboloid elliptic $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$, $p > 0, q > 0$.