BÀI TẬP 6
TÍCH PHÂN BỘI

Bài 1. Tính tích phân $\iint\limits_{A} \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ trong đó A là tam giác được giới hạn bởi các đường thẳng $x=0$, $y=x$ và $y=\pi$.

Bài 2. Tính các tích phân sau đây

(a)
$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant x} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(b)
$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ 1\leqslant x+y\\ y\leqslant x}} \left(x^2-y^2\right) e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(c)
$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant x\\ x^2+y^2\leqslant \pi^2}} x\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(d)
$$\iint\limits_{\substack{1\leqslant xy\leqslant 2\\ 1\leqslant \frac{y}{x}\leqslant 2}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Bài 3. Dùng tọa độ cực chứng minh rằng
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Bài 4. Tính tích phân sau
$$\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Bài 5. Tính tích phân sau
$$\iint\limits_{D} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
trong đó $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right\}$ với $a,b>0$.

Bài 6. Tính tích phân sau
$$\iint\limits_{0\leqslant x,y\leqslant \pi} |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Bài 7. Sử dụng phép đổi biến $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{v}{u^2+v^2}$ hãy tính tích phân

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-6y=0$.

Bài 8. Tính tích phân $\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ trong đó D là miền được giới hạn bởi trục hoành và cung thứ nhất của đường cycloide

$$x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Bài 9. Tính tích phân

$$\iint\limits_A \frac{x^2 \sin xy}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

trong đó A là miền được giới hạn bởi bốn parabol $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = 3x$ và $y^2 = 4x$.

Bài 10. Tính tích phân

$$\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi các trục tọa độ và bởi parabol $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$.

Bài 11. Với mỗi hàm f được cho dưới đây, hãy tính các tích phân sau

$$\int\limits_{[0,1]} \mathrm{d}x \int\limits_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad , \quad \int\limits_{[0,1]} \mathrm{d}y \int\limits_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^{-3} & \text{nếu } 0 < y < \left|x - \frac{1}{2}\right|, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

(c) $f(x,y) = (1-xy)^{-p}$, $p > 0$.

Bài 12. Với $0 < a < b$ hãy tính

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ a\leqslant y\leqslant b}} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

từ đó suy ra

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Bài 13. Sử dụng phép đổi biến $u = y^2 - x^2$, $v = xy$, hãy tính tích phân

$$\iint_D \left(y^2 - x^2\right)^{xy} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

trong đó D là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất bị giới hạn bởi các đường cong $y = x$, $y^2 = x^2 + 1$, $xy = 1$, $xy = 2$.

Bài 14. Chứng minh rằng

$$\iint_D \ln |\sin (x - y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$$

trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi\}$.

Bài 15. Tính tích phân

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left(x^2 + y^2\right) \ln \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Bài 16. Chứng minh rằng

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(\ln x + \ln y)(xy - 2)} = \ln 2.$$

Bài 17. Chứng minh rằng

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{4(x + y)\sqrt{(1 - x)(1 - y)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^2}.$$

Bài 18. Sử dụng phép đổi biến $u = x + y$, $v = x - y$, hãy tính tích phân

$$\iint_{\substack{0<x,y \\ x+y<1}} \frac{3y}{\sqrt{1 + (x + y)^3}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Bài 19. Tính tích phân

$$\iint_{0<x,y} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(1 + y)(1 + x^2 y)}$$

từ đó suy ra giá trị của

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x.$$

Bài 20. Tính các tích phân sau

(a) $\iiint\limits_B z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ trong đó B là miền giới hạn bởi mặt nón $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$ và mặt phẳng $z = h$.

(b) $\iiint\limits_C z^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ trong đó C là phần chung của hai hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

(c) $\iiint\limits_D (x + y + z)^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ trong đó D là phần chung của paraboloid $x^2 + y^2 \leq 2az$ và hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

Bài 21. Tính các tích phân sau

(a)
$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\leqslant 1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

(b)
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} |x|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

(c)
$$\iiint\limits_{\max\{|x|,|y|,|z|\}\leqslant 1} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) e^z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

(d)
$$\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x,y,z \\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1}} xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Bài 22. Tính tích phân
$$\iiint\limits_D \frac{xyz}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$
trong đó D là vật thể giới hạn phía trên bởi mặt $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xy$ và phía dưới bởi mặt $z = 0$.

Bài 23. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt

(a) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$.

(b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{h^3}$.

(c) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Bài 24. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt
$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$
trong đó $h_1, h_2, h_3 > 0$ và định thức $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Bài 25. Tính các tích phân sau

(a)

$$\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}} \frac{xyz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(b)

$$\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1^2}} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Bài 26. Với mỗi $0 < n \in \mathbb{N}$ ta ký hiệu

$$D_n = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1\right\}.$$

Với $0 < k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, tính $\int\limits_{D_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}\,\mathrm{d}x$.

Bài 27. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt trụ elliptic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, mặt phẳng $z=0$ và mặt paraboloid $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=z$.

Bài 28. Sử dụng phép đổi biến $x+y+z=u$, $y+z=uv$, $z=uvw$, hãy tính tích phân

$$\iiint\limits_{D} xyz\,(1-x-y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

trong đó D là tứ diện giới hạn bởi $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ và $x+y+z\leq 1$.

Bài 29. Bằng phép đổi biến $u=\frac{\pi}{2}-x$, $v=\frac{\pi}{2}-y$ và chuyển sang hệ tọa độ cực hãy tìm giá trị α sao cho

$$\iint\limits_{0<x,y<\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1-\sin x\sin y}\right)^{\alpha}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \alpha.$$

Bài 30. Sử dụng phép đổi biến $(x,y,z)=(w,v,u)$ hãy tính tích phân

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{x^4+2y^4}{x^4+4y^4+z^4}.$$

Bài 31. Bằng phép đổi biến $u=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2}$, $v=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{2}$, $w=\mathrm{tg}^{-1}\frac{z}{2}$ và chuyển sang hệ tọa độ cầu hãy tính tích phân

$$\iiint\limits_{0<x,y,z<\pi} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-\cos x\cos y\cos z}.$$

Bài 32. Tính tích phân

$$\iiint\limits_{\substack{0<x,y<1\\0<z}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$

từ đó suy ra giá trị của

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Bài 33. Bằng phép đổi biến $x = u^{\frac{2}{\alpha}}$, $y = v^{\frac{2}{\beta}}$, $z = w^{\frac{2}{\gamma}}$ và chuyển sang hệ tọa độ cầu hãy tìm các số thực α, β, γ sao cho

$$\iiint\limits_{0<x,y,z} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma} < +\infty$$

từ đó tính giá trị của tích phân.

Bài 34. Tính

$$\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Bài 35. Chứng minh công thức thể tích hình cầu n chiều tâm tại gốc O bán kính 1

$$\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Bài 36. Tìm thể tích của phức n-chiều T_n xác định bởi

$$T_n : \begin{cases} x_1, x_2, .., x_n & \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 + .. + x_n & \leqslant 1. \end{cases}$$

Bài 37. Chứng minh đối với mọi ánh xạ tuyến tính (cho dưới dạng ma trận) $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ thể tích của ảnh $g(P)$ bằng $|\det g|\, v\,(P)$ đối với mọi hình hộp $P \subset \mathbb{R}^n$.