Bài Tập 9
Công thức Taylor và các ứng dụng

Bài 1. Khai triển các hàm sau đến cấp cho trước

(i) $f(x) = e^{2x-x^2}$ đến x^5.

(ii) $f(x) = \sin(\sin x)$ đến x^3.

(iii) $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$ đến x^6.

Bài 2. Tìm ba số hạng đầu trong khải triển hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ theo lũy thừa nguyên dương của $x - 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu $f''(x)$ tồn tại thì

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x)$.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $f'''(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x).$$

Bài 5. Chứng minh rằng nếu f là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 thì

$$\lim_{h\to 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{3h^2} = f''(x).$$

Bài 6. Tính các giới hạn sau đây

(i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x - \cos x}{x^2 + \sin(2x)}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

(vii) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(viii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} - e\right)$.

(ix) $\lim\limits_{x\to+\infty} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$.

(x) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Bài 7. Có thể áp dụng quy tắc l'Hospital trong các giới hạn sau hay không?

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{2x+\sin x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

Bài 8. Giả sử rằng

(i) Hàm f khải vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$.

(ii) Tồn tại hằng số dương L sao cho $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant L$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ và mọi $n\in\mathbb{N}$.

(iii) $f(\frac{1}{n})=0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f\equiv 0$.

Bài 9. Giả sử hàm f khả vi liên tục cho đến cấp 2 trên $(0,1)$. Giả sử thêm rằng $f(0)=f(1)=0$ và $|f''(x)|\leqslant 1$ với mọi $x\in(0,1)$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ với mọi $x\in(0,1)$.