BÀI TẬP 2

TOPO TRÊN $\mathbb{R}^n$

Bài 1. Chứng minh rằng các tập hợp sau là mở trong $\mathbb{R}^n$

(a) $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|x_1 > 0\}$.

(b) $\left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|x_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}\right\}$.

(c) $\left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|1 > x_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}\right\}$.

Bài 2. Chứng minh rằng các tập hợp sau là đóng trong $\mathbb{R}^n$

(a) $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|x_1 \geq 0\}$.

(b) $\left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}\right\}$.

(c) $\left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|1 \geq x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}\right\}$.

Bài 3. Chứng minh rằng $f \mapsto \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$ là một chuẩn trong không gian các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$.

Bài 4. Chứng minh rằng $f \mapsto \int_a^b |f(x)|\, dx$ là một chuẩn trong không gian các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$.

Bài 5. Giả sử A là tập hợp con của không gian metric (X, ρ). Số thực

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

được gọi là khoảng cách từ điểm $x \in X$ đến tập hợp A.

(a) Chứng minh rằng $d(x, A) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \overline{A}$.

(b) Cho một ví dụ $d(x, A) = 0$ nhưng $x \notin A$.

Bài 6. Giả sử A, B là hai tập hợp con của không gian metric (X, ρ). Số thực

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

được gọi là khoảng cách từ tập hợp A đến tập hợp B.

(a) Chứng minh rằng nếu $d(A, B) = 0$ và A và B là hai tập hợp compact thì $A \cap B \neq 0$.

(b) Khẳng định trên còn đúng hay không nếu A chỉ là tập con đóng?

(c) Chứng minh rằng nếu A, B là hai tập compact thì tồn tại $a \in A$ và $b \in B$ sao cho $d(A, B) = \rho(a, b)$.

Bài 7. Cho A, B là hai tập hợp bất kỳ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$A + B = \{a + b \,|a \in A, b \in B\}.$$

(a) Chứng minh rằng nếu một trong các tập hợp A và B mở thì $A + B$ mở.

(b) Chứng minh rằng nếu các tập hợp A và B là compact thì $A + B$ compact.

(c) Chứng minh rằng nếu tập hợp A đóng và tập hợp B compact thì $A + B$ đóng.

(d) Nếu các tập hợp A và B đóng thì $A + B$ có đóng không?