

**BÀI TẬP 3**  
HÀM LIÊN TỤC TRÊN  $\mathbb{R}^n$

**Bài 1.** Khảo sát giới hạn lặp và giới hạn kép của các hàm số sau tại điểm  $(0, 0)$ .

- (a)  $(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ .
- (b)  $\frac{\sin x - \sin y}{x^2 + y^2}$ .
- (c)  $\frac{(x + y) \cos(x + y)}{\sin(x - y)}$ .
- (d)  $\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ .
- (e)  $\sqrt{2x^2 + y^2} \sin \frac{1}{xy}$ .
- (f)  $\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$ .
- (g)  $(x + y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ .
- (h)  $x^y$ .
- (i)  $(x^2 + y^2)^{xy}$ .

**Bài 2.** Tính các giới hạn sau.

- (a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$ .
- (b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$ .
- (c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$ .
- (d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ .

**Bài 3.** Cho một ví dụ về hàm số  $f(x, y)$  sao cho

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  và  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  tồn tại nhưng  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  không tồn tại.
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  và  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  không tồn tại nhưng  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  tồn tại.
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  tồn tại nhưng  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  không tồn tại.
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  không tồn tại nhưng  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  tồn tại.

**Bài 4.** Xét tính liên tục của các hàm số sau.

- (a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{nếu } |x| + |y| \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } |x| + |y| = 0. \end{cases}$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|xy|}} & \text{nếu } xy \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } xy = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \sin x \sin y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Bài 5.** Khảo sát tính liên tục đều của hàm số  $f(x, y) = \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  trong.

- (a)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ .

**Bài 6.** Khảo sát tính liên tục đều của các hàm số sau.

- (a)  $\frac{y}{x^2 + 1}$  trong  $\mathbb{R}^2$ .
- (b)  $\sqrt{|x + y|}$  trong  $\mathbb{R}^2$ .
- (c)  $2x - 3y + 5$  trong  $\mathbb{R}^2$ .
- (d)  $\sqrt{x^2 + y^2}$  trong  $\mathbb{R}^2$ .
- (e)  $\sin(x^2 + y^2)$  trong  $\mathbb{R}^2$ .
- (f)  $\arcsin \frac{x}{y}$  trong tập xác định của nó.

**Bài 7.** Chứng minh rằng mọi ánh xạ tuyến tính  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  đều liên tục đều trong  $\mathbb{R}^n$ .

**Bài 8.** Chứng minh rằng nếu hàm  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  là liên tục đều trên tập bị chặn  $A$  thì  $f$  bị chặn trên  $A$ .