

BÀI TẬP 4
ĐẠO HÀM TRÊN \mathbb{R}^n

Bài 1. Dùng định nghĩa chứng minh các hàm sau khả vi tại các điểm tương ứng và tìm đạo hàm tại các điểm đó.

- (a) $x^2 + y^2$ tại $(1, 1)$.
- (b) $(x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$ tại $(0, 0)$.

Bài 2. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Hãy chứng minh rằng

- (a) f liên tục tại $(0, 0)$.
- (b) f có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y là những hàm bị chặn nhưng f không khả vi tại $(0, 0)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Chứng minh rằng

- (a) f liên tục tại $(0, 0)$.
- (b) f có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại $(0, 0)$.
- (c) f không khả vi tại $(0, 0)$.

Bài 4. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

- (a) Tìm các đạo hàm riêng f'_x, f'_y .
- (b) Chứng minh các đạo hàm riêng f'_x, f'_y gián đoạn tại $(0, 0)$.
- (c) Chứng minh rằng f khả vi tại $(0, 0)$.

Bài 5. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục.
- (b) Chứng minh rằng $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$.

Bài 6. Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng f và các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (b) Chứng minh rằng f gián đoạn tại $(0, 0)$.
- (c) Tính các đạo hàm riêng f'_x, f'_y và xét tính liên tục của chúng tại $(0, 0)$.
- (d) Các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{xy}(0, 0), f''_{yx}(0, 0)$ có tồn tại hay không?

Bài 7. Tính u'_x, u'_y, u''_{xy} trong đó $u = f(x + y, x^2 + y^2)$ với giả thiết f là hàm có đạo hàm riêng đến cấp 2 theo các biến của nó.

Bài 8. Tìm các đạo hàm riêng cho đến cấp 2 của hàm $f(x, y) = \int_x^y e^t \ln t dt$ với $0 < x < y$.

Bài 9. Chứng minh rằng nếu hàm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục và bị chặn trên \mathbb{R}^2 thì f liên tục đều trên \mathbb{R}^2 .

Bài 10. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x, y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ tại điểm $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ theo hướng của pháp tuyến trong tại điểm M của ellip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài 11. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$ tại điểm $(1, 1)$ theo hướng tạo với trục hoành một góc 60° .

Bài 12. Tính đạo hàm của hàm hợp $f \circ g$ trong đó $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ và $g(x, y) = (x + y, x - y)$.