

BÀI TẬP 8
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Bài 1. Tính các giới hạn sau

(a) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + t^2} dx.$

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^{t+1} \frac{dx}{1+x^2+t^2}.$

Bài 2. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} \quad , \quad a \neq 1, a > 0$$

từ đó tính

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Bài 3. Chứng minh hàm số

$$f(t) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + t}$$

có đạo hàm mọi cấp trên $(0, +\infty)$.

Bài 4. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số $I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx.$

Bài 5. Tính các tích phân

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} \quad , \quad \int_0^\pi \frac{dx}{(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^2}$$

trong đó α và β là các hằng số dương.

Bài 6. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx$$

hội tụ đều trên mọi đoạn $[0, a]$ nhưng không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

Bài 7. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^t}$$

trên $[2, +\infty)$ và trên $(1, +\infty)$.

Bài 8. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

hội tụ đều trên mọi đoạn hữu hạn không chứa gốc nhưng không hội tụ đều trên mọi đoạn hữu hạn chứa gốc.

Bài 9. Khảo sát tính hội tụ đều của các tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

trên $[0, +\infty)$.

Bài 10. Tính các tích phân sau

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2x^2} dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2x^2} dx.$$

Bài 11. Chứng minh rằng

(a) Hàm số $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\alpha} dx$ liên tục trên $(2, +\infty)$.

(b) Hàm số $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ liên tục trên $(0, +\infty)$.

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} e^{-t^2x}}{1+x^2} dx$$

xác định và liên tục trên \mathbb{R} .

Bài 13. Cho hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Chứng minh rằng $I'(t) = -\frac{1}{2}tI(t)$.

(b) Tính $I(t)$.

Bài 14. Cho hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}} dx \quad , \quad t \geq 0.$$

(a) Chứng minh rằng $I'(t) = -2I(t)$.

(b) Tính $I(t)$.

Bài 15. Chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Bài 16. Tính các tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{x} dx \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

và

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x) - \cos(\alpha x)}{x^2} dx \quad , \quad 0 < \alpha < \beta.$$