

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLP'08

Môn: **Giải tích**

Thời gian làm bài: **150 phút**

Câu 1. Chứng minh rằng dãy số

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{1.2}\right) \left(1 + \frac{1}{2.3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

là hội tụ.

Câu 2. Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = a > 0, \\ x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3b)}{3x_n^2 + b}, \text{ với } b \geq 0 \end{cases}$$

là hội tụ. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Câu 3. Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Hỏi rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm thuộc $[0, 1]$ hay không nếu hàm f thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây

- (a) f là hàm đơn điệu giảm thực sự.
- (b) f là hàm đơn điệu tăng thực sự.

Câu 4. Hàm số f khả vi liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geq 1, \quad \int_0^1 x(f'(x))^2 dx \geq 1.$$

Câu 5. Cho hàm f khả vi trên $[a, b]$.

- (a) Chứng minh rằng nếu $f(a) = f(b)$ và $f'(a) = 0$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \quad (\star)$$

- (b) Chứng minh rằng nếu $f'(b) = f'(a) = 0$ thì cũng tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa mãn (\star) .

Câu 6. Tìm tất cả các hàm số f xác định và có đạo hàm trên \mathbb{R} , ngoài ra với mọi $x \neq y$ ta đều có

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right).$$