ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2008
MÔN THI CƠ CỞ: GIẢI TÍCH
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Phát biểu và chứng minh định lý Bolzano-Weirstrass.

2. Định nghĩa giới hạn trên, giới hạn dưới của một dãy số. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ khi và chỉ khi

$$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n.$$

Câu II.

1. Cho A là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Định nghĩa tính khả vi và đạo hàm của hàm f tại điểm $a \in A$. Chứng minh rằng nếu hàm f khả vi tại điểm $a \in A$ thì

   (a) f có các đạo hàm riêng cấp một tại điểm a.

   (b) f có đạo hàm theo mọi hướng $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tại điểm a.

2. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

   (a) Tìm α để hàm f có các đạo hàm riêng cấp một tại điểm $(0,0)$.

   (b) Tìm α để hàm f khả vi tại điểm $(0,0)$.

Câu III.

1. Tìm điều kiện để cho tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

   là hội tụ.

2. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx}{1+n^{\frac{5}{2}}x^2}$$

   trên $x \in [0, +\infty)$.

Câu IV. Chứng minh rằng nếu hàm f liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và có giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, $|L| < +\infty$ thì f liên tục đều trong khoảng $[a, +\infty)$.