Bài Toán Dirichlet Đối Với Hệ Elliptic Nửa Tuyến Tính Với Phần Chính Là Toán Tử Laplace Trong Miền Bị Chặn

Chương 1. Bài toán Dirichlet phi tuyến với phần chính là toán tử Laplace

1.1. Bổ túc các kiến thức cơ bản

1.2. Không gian Sobolev

1.3. Phổ của bài toán Dirichlet đối với toán tử Laplace

Chương 2. Phương pháp Lyapunov-Schmidt và bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai nửa tuyến tính

2.1. Bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai nửa tuyến tính

Ký hiệu λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ và φ_1 là hàm riêng ứng với giá trị riêng này. Xét bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cho bởi

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_1 u + g(u) &= h(x) \text{ trong } \Omega, \\ u &= 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn.

Định lý 1. *Giả sử rằng*

a) $g \in C^1(R, R)$ *và tồn tại hằng số* k *thoả mãn* $\lambda_1 + k < \lambda_2$ *sao cho* $|g(u) - g(v)| \leqslant k|u - v|$ *với mọi* $u, v \in \mathbb{R}$,

b) g *bị chặn,*

c) $h \in L^\infty(\Omega)$.

Khi đó tồn tại khoảng đóng $[a, b]$ *sao cho nếu*

$+ \int\limits_\Omega h\varphi_1 \in (a, b)$ *thì bài toán (2.1) có nghiệm,*

$+ \int\limits_\Omega h\varphi_1 \notin [a, b]$ *thì bài toán (2.1) vô nghiệm,*

Định lý 2. *Giả sử rằng* $g \in C^1(R, R)$ *thoả mãn các điều kiện a) và b) nói ở trên, ngoài ra giả sử thêm*

d) $g(0) = 0$,

e) $g'(0) < 0$ *và* $\lim\limits_{s\to+\infty} g(s) = a > 0$, $\lim\limits_{s\to+\infty} g(s) = -b < 0$.

Khi đó bài toán (2.1) trong trường hợp $h(x) \equiv 0$ *có ít nhất 3 nghiệm.*

2.2. Bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic cấp hai-trường hợp đặc biệt

Xét bài toán

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + \delta v + g_1(u, v) - r_1(x) \text{ trong } \Omega, \\ -\Delta v &= \theta u + \gamma v + g_2(u, v) - r_2(x) \text{ trong } \Omega, \\ u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó Ω là một miền trơn, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với điều kiện biên thuần nhất; g_1, g_2 là các hàm Lipschitz bị chặn với các hằng số Lipschitz lần lượt là k_1 và k_2, tức là

$$|g_i(u,v) - g_i(\widetilde{u},\widetilde{v})| \leqslant k_i(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|), \forall i = 1,2, u, \widetilde{u}, v, \widetilde{v}.$$

Ký hiệu

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, -\Delta U = \begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \lambda & \delta \\ \theta & \gamma \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \end{pmatrix}.$$

Định lý 3. *Giả sử rằng*

(H1) $\sqrt{2(k_1^2+k_2^2)} + \|A\| < \lambda_2$,

(H2) A là ma trận chéo hoá được với λ_1 là giá trị riêng bội 2.

Khi đó tồn tại các số thực a_i và b_i $(i = 1,2)$ sao cho

- *Nếu* $\int\limits_{\Omega} r_i\varphi_1 \in (a_i, b_i)$, $i = 1,2$ *thì bài toán (2.2) có nghiệm.*
- *Nếu* $\int\limits_{\Omega} r_i\varphi_1 \notin [a_i, b_i]$, $i = 1,2$ *thì bài toán (2.2) không có nghiệm.*

Định lý 4. *Giả thiết (H1) và ngoài ra ta giả thiết thêm*

(H3) A có các giá trị riêng phân biệt λ_1 và μ,

(H4) $\dfrac{2k_1|\Pi|}{|(\mu-\lambda_1)\Pi^1|}\left(1 + \left(\dfrac{\sqrt{2(k_1^2+k_2^2)}}{\lambda_2 - \|A\| - \sqrt{2(k_1^2+k_2^2)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$

Khi đó tồn tại các số thực c_1 và d_1 sao cho

- *Nếu* $\int\limits_{\Omega} r_2\varphi_1 \in (c_1, d_1)$ *thì bài toán (2.2) có nghiệm.*
- *Nếu* $\int\limits_{\Omega} r_2\varphi_1 \notin [c_1, d_1]$ *thì bài toán (2.2) không có nghiệm.*

Chương 3. Bài toán Dirichlet đối với hệ elliptic cấp hai nửa tuyến tính

Xét bài toán (2.2) trong trường hợp $r_1 = r_2 \equiv 0$, tức là

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + \delta v + g_1(u,v) \text{ trong } \Omega, \\ -\Delta v &= \theta u + \gamma v + g_2(u,v) \text{ trong } \Omega, \\ u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

Với các ký hiệu tương tự như trong chương trước ta viết lại hệ (3.3) dưới dạng

$$-\Delta U = AU + G(U).$$

Ký hiệu X là không gian con của $H_0^1(\Omega)$ sinh bởi φ_1. Gọi $Y = X^\perp = \langle\varphi_1\rangle^\perp$ là phần bù trực giao của X trong $H_0^1(\Omega)$. Khi đó ta có phân tích $H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$.

Như vậy, với $U = (u,v)^T$ trong đó $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ta có thể viết $U = x + y$, trong đó $x = (x_1, x_2) \in X \times X$ và $y = (y_1, y_2) \in Y \times Y$.

Ký hiệu P và Q lần lượt là các toán tử chiếu vuông góc từ không gian E lên trên các không gian $X \times X$ và $Y \times Y$ tương ứng. Khi đó (3.3) được viết dưới dạng

$$x = P(-\Delta)^{-1}(Ax + G(x+y)), \tag{3.4}$$

$$y = Q(-\Delta)^{-1}(Ay + G(x+y)). \tag{3.5}$$

Với mỗi $x \in X \times X$ cố định, ta giải hệ (3.5) để thu được toán tử nghiệm $y(x)$ và khi đó ta tìm nghiệm của hệ đang xét dưới dạng $x + y(x)$. Vậy bài toán (3.3) có nghiệm khi và chỉ khi các hệ trên có nghiệm.

Định lý 5. *Giả thiết (H1) và ngoài ra ta giả thiết thêm*

(H5) λ_1 *không phải là giá trị riêng của* A,

(H6) $2\|B^{-1}\|\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\left(1 + \left(\dfrac{\sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}{\lambda_2 - \|A\| - \sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1,$

trong đó $B = \lambda_1 I - A$. *Khi đó bài toán (3.3) có duy nhất nghiệm* $(u,v)^T$.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý thông qua các bước sau đây

- ⋆ Từ giả thiết H1) và nguyên lý ánh xạ co Banach ta suy ra với mỗi $x \in X \times X$ cố định thì (3.5) tồn tại và duy nhất nghiệm $y = y(x) \in Y \times Y$. Khẳng định trên cho phép ta định nghĩa một ánh xạ đơn trị F giữa $X \times X$ và $Y \times Y$ như sau

$$F : X \times X \to Y \times Y,$$
$$x \mapsto F(x) := y(x).$$

  Do đó, thay y bởi $F(x)$ vào (3.4) ta đi đến phương trình

$$x = P(-\Delta)^{-1}(Ax + G(x + F(x))). \tag{3.6}$$

- ⋆ Đặt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\varphi_1 \\ \tau\varphi_1 \end{pmatrix} \in X \times X$ và $F(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Y \times Y$ trong đó $t, \tau \in \mathbb{R}$. Khi đó biến đổi (3.6) ta được

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & -\delta \\ -\theta & \lambda_1 - \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix}\varphi_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P(-\Delta)^{-1} g_1(t\varphi_1 + y_1, \tau\varphi_1 + y_2) \\ \lambda_1 P(-\Delta)^{-1} g_2(t\varphi_1 + y_1, \tau\varphi_1 + y_2) \end{pmatrix}.$$

  Bằng cách nhân 2 vế của đẳng thức trên với φ_1 sau đó lấy tích phân trên Ω ta đi đến hệ phương trình $T = B^{-1}\widetilde{G}(T)$, trong đó ta ký hiệu $B = \lambda_1 I - A$, B^{-1} là ma trận nghịch đảo của B (tồn tại do giả thiết H5)), $T = (t, \tau)^T$ và

$$\widetilde{G}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \int\limits_{\Omega} P(-\Delta)^{-1} g_1(t\varphi_1 + y_1, \tau\varphi_1 + y_2)\varphi_1 \\ \lambda_1 \int\limits_{\Omega} P(-\Delta)^{-1} g_2(t\varphi_1 + y_1, \tau\varphi_1 + y_2)\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

  Sử dụng điều kiện (H6) ta chứng minh được $B^{-1}\widetilde{G}(T)$ là ánh xạ co từ đó suy ra sự tồn tại nghiệm của (3.4) và do đó ta suy ra sự tồn tại nghiệm của bài toán.

Định lý được chứng minh. □