3

Phương pháp biến phân và hệ phương trình elliptic cấp hai nửa tuyến tính với phần chính là toán tử Laplace

Trong chương này, chúng tôi xét tính giải được cho hệ phương trình elliptic cấp hai nửa tuyến tính với điều kiện biên Dirichlet sau

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + \delta v + f(\mathbf{x}, u, v) \ \text{ trong } \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u + \gamma v + g(\mathbf{x}, u, v) \ \text{ trong } \Omega, \\ u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ là miền bị chặn với biên trơn; λ, δ, γ là các số thực. Chúng ta giả thiết f và g là các hàm Carathéodory thỏa mãn điều kiện

$$|f(\mathbf{x}, u, v)| + |g(\mathbf{x}, u, v)| \leq a(|u| + |v|)^{\sigma} + b \tag{$\mathbf{F_0}$}$$

trong đó $a, b > 0$, σ là các hằng số và

$$0 \quad \leq \sigma \quad \begin{cases} \leq \dfrac{N+2}{N-2}, & \text{nếu } N \geq 3, \\ < +\infty, & \text{nếu } N = 1, 2. \end{cases}$$

Giả sử rằng tồn tại hàm $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (thuộc lớp C^1 theo các biến u, v) sao cho

$$(f, g) = \nabla F$$

tức là

$$f(\mathbf{x}, u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u, v),$$
$$g(\mathbf{x}, u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{x}, u, v),$$

với mọi $\mathbf{x} \in \Omega$. Đây là kết quả đã công bố trong công trình: D.G. Costa and C.A. Magalhães, A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic system, *J. Diff. Eqns.*, **111** (1994), 103-122. Phương pháp được sử dụng ở đây là phương pháp biến phân. Chúng ta sẽ bắt đầu chương này bằng việc cung cấp một số kiến thức cơ bản nhất về phép tính vi phân trong không gian Banach.

3.1 Một số kiến thức cơ bản về phép tính vi phân trong không gian Banach

3.1.1 Đạo hàm Frechét và đạo hàm Gâteaux

Đạo hàm Frechét không có gì khác hơn là sự mở rộng của phép tính đạo hàm thông thường trong không gian Euclid cho không gian Banach. Giả sử X, Y là các không gian Banach, $U \subset X$ là một tập mở, $F : U \to Y$ là một ánh xạ.

Định nghĩa 3.2. *Cho $u \in U$. F được gọi là khả vi Frechét tại u nếu tồn tại $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sao cho*

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|F(u+h) - F(u) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Ta có thể thấy A nếu tồn tại thì duy nhất và ta gọi A là vi phân Frechét của ánh xạ F tại điểm u và ký hiệu $A = \mathrm{d}F(u)$. Nếu F khả vi Frechét tại mọi điểm $u \in U$ thì ta bảo F là khả vi Frechét trong U.

Định nghĩa 3.3. *Giả sử $F : U \in Y$ khả vi Frechét trong U. Khi đó ánh xạ*

$$\begin{aligned} F' : U &\to \mathcal{L}(X, Y) \\ u &\mapsto \mathrm{d}F(u) \end{aligned}$$

được gọi là đạo hàm Frechét của F trong U. Nếu F' liên tục tại u thì ta nói F khả vi liên tục tại u. Nếu F' liên tục trong U thì ta nói F thuộc lớp C^1 trong U và viết $F \in C^1(U, Y)$.

Định nghĩa 3.4. *Cho $u \in U$. F được gọi là khả vi Gâteaux tại u nếu tồn tại $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sao cho với mọi $h \in X$ ta đều có*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\|F(u + \varepsilon h) - F(u)\|_Y}{\varepsilon} - A(h) \right) = 0.$$

Ta có thể thấy A nếu tồn tại thì duy nhất và ta gọi A là vi phân Gâteaux của ánh xạ F tại điểm u và ký hiệu $A = \mathrm{d}_G F(u)$. Nếu F khả vi Gâteaux tại mọi điểm $u \in U$ thì ta bảo F là khả vi Gâteaux trong U.

Rõ rằng nếu F khả vi Frechét tại u thì F cũng khả vi Gâteaux tại u và hai khái niệm đạo hàm này là trùng nhau. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, chẳng hạn hàm số $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$F(s, t) = \begin{cases} \left(\frac{s^2 t}{s^4 + t^2} \right)^2, & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

khả vi Gâteaux nhưng không khả vi Frechét.

Trong thực hành, người ta có thể kiểm tra tính khả vi Frechét thông qua tính khả vi Gâteaux và một số điều kiện nhất định khác. Với $u, v \in U$ ta ký hiệu

$$[u, v] = \{tu + (1 - t) v : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Định lý 3.12 (giá trị trung bình). *Giả sử $F : U \to Y$ khả vi Gâteaux trong U. Cho trước $u, v \in U$ sao cho $[u, v] \subset U$. Khi đó ta có*

$$\|F(u) - F(v)\|_Y \leq \sup_{w \in [u,v]} \|\mathrm{d}_G F(w)\| \, \|u - v\|_X .$$

Định lý 3.13 (quan hệ giữa đạo hàm Gâteaux và Frechét). *Giả sử $F : U \to Y$ khả vi Gâteaux trong U và đạo hàm Gâteaux*

$$\begin{aligned} F'_G : U &\to L(X, Y) \\ u &\mapsto \mathrm{d}_G F(u) \end{aligned}$$

liên tục tại $u^\star$. Khi đó F khả vi Frechét tại $u^\star$ và

$$\mathrm{d}F(u^\star) = \mathrm{d}_G F(u^\star) .$$

3.1.2 Toán tử Nemitskii

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một tập mở bị chặn. Xét hàm $f : \Omega \times \mathbb{R}^{N'} \to \mathbb{R}$. Ký hiệu $M(\Omega)$ là lớp các hàm đo được $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Định nghĩa 3.5. *Toán tử Nemitskii liên kết với hàm f là toán tử được xác định trên $M(\Omega)$ như sau*

$$u(\cdot) \mapsto f(\cdot, u(\cdot)).$$

Ta sẽ ký hiệu f là toán tử Nemitskii.

Định nghĩa 3.6. *Hàm $f(\mathbf{x}, u)$ được gọi là Carathéodory nếu*

(i) $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, u)$ *đo được theo* $\mathbf{x}$ *với mọi* u.

(ii) $u \mapsto f(\mathbf{x}, u)$ *liên tục theo* u *hầu khắp nơi theo* $\mathbf{x}$.

Giả thiết rằng tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|f(\mathbf{x}, u)| \leq c + c\,|u|^{\frac{p}{q}} . \tag{3.2}$$

Định lý 3.14. *Nếu f là hàm Carathéodory thì toán tử Nemitski*

$$f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

với $p, q \geq 1$ là liên tục.

3.1.3 Định lý Krasnoselskii

Giả sử $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là hàm đo được theo $\mathbf{x} \in \Omega$, khả vi liên tục theo hai biến còn lại $u \in \mathbb{R}$ và $p \in \mathbb{R}^N$. Ký hiệu

$$F_u = \frac{\partial}{\partial u} F \quad , \quad F_p = \frac{\partial}{\partial p} F.$$

Giả thiết rằng

- $\left|F\left(\mathbf{x},u,p\right)\right| \le c\left(1+|u|^{s_1}+|p|^2\right)$,
- $\left|F_u\left(\mathbf{x},u,p\right)\right| \le c\left(1+|u|^{s_2}+|p|^{t_2}\right)$,
- $\left|F_p\left(\mathbf{x},u,p\right)\right| \le c\left(1+|u|^{s_3}+|p|\right)$,

trong đó $c > 0$ là hằng số nào đó và

$$s_1, s_3 \quad \begin{cases} \le \frac{2N}{N-2}, & \text{nếu } N \ge 3, \\ < +\infty, & \text{nếu } N = 1, 2. \end{cases}$$

$$s_2 \quad \begin{cases} \le \frac{N+2}{N-2}, & \text{nếu } N \ge 3, \\ < +\infty, & \text{nếu } N = 1, 2. \end{cases}$$

$$t_2 \quad \begin{cases} \le \frac{N+2}{N}, & \text{nếu } N \ge 3, \\ < 2, & \text{nếu } N = 1, 2. \end{cases}$$

Khi đó phiếm hàm

$$E\left(u\right) = \int_\Omega F\left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

thuộc lớp $C^1(H_0^1(\Omega))$, hơn nữa

$$\mathrm{d}E(u)(v) = \int_\Omega \left(F_u(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))v(\mathbf{x}) + F_p(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Từ định lý Krasnoselskii ta suy ra các phiếm hàm sau

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad , \quad \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

thuộc lớp $C^1(H_0^1(\Omega))$ với mọi N.

3.1.4 Định lý nhúng Sobolev

Các định lý nhúng có vai trò cực kỳ quan trọng trong phép tính biến phân. Ta dẫn ra đây định lý nhúng Sobolev mà ta sẽ dùng trong các chứng minh về sau.

Định lý 3.15 (nhúng Sobolev). *Giả sử $\Omega \in \mathbb{R}^N$ là miền mở bị chặn với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp $C^{0,1}$. Giả sử $k \geq 1$ và $1 \leq p \leq +\infty$. Khi đó ta có các phép nhúng sau*

(i) *Nếu $kp < N$ thì*

$$W^{k,p}(\Omega) \quad \begin{cases} \hookrightarrow L^q(\Omega) & 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp} \\ \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) & 1 \leq q < \frac{Np}{N-kp} \end{cases}$$

(ii) *Nếu $kp = N$ thì*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

với mọi

$$1 \leq q.$$

(iii) *Nếu $kp > N$ thì*

$$W^{k,p}(\Omega) \quad \begin{cases} \hookrightarrow C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) & 0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{N}{p} \\ \hookrightarrow\hookrightarrow C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) & 0 \leq \alpha < k - m - \frac{N}{p} \end{cases}$$

trong đó m là số tự nhiên thỏa mãn

$$0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m + 1.$$

Định lý nhúng Sobolev cũng đúng khi thay không gian $W^{k,p}(\Omega)$ bởi không gian $W_0^{k,p}(\Omega)$. Trong trường hợp $p = q = 2$ ta thấy phép nhúng

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$$

là compắc.

3.2 Phương pháp biến phân

Để tìm nghiệm của phương trình $f(\mathbf{x}) = 0$ người ta có thể chuyển về việc tìm điểm tới hạn của $F(\mathbf{x})$ trong đó F là một nguyên hàm của f.

3.2.1 Điều kiện compắc Palais-Smale

Giả sử V là một không gian Banach, phiếm hàm $E \in C^1(V)$. Dãy $\{u_n\} \subset V$ được gọi là dãy Palais-Smale (viết tắt (PS)) của phiếm hàm E nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

- Dãy $\{E(u_n)\}_n$ bị chặn.
- $\|E'(u_n)\| \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ta nói phiếm hàm E thỏa mãn điều kiện (PS) nếu mọi dãy (PS) của E đều có thể trích được một dãy con hội tụ.

3.2.2 Định lý điểm yên ngựa

Định lý 3.16. *Cho X là một không gian Banach. Giả sử ta có phân tích thành các không gian con $X = Y \oplus Z$ trong đó $\dim Y < \infty$. Với $\varrho > 0$ ta định nghĩa các tập*

$$\mathcal{M} := \{u \in Y : \|u\| \le \varrho\} \text{ và } \mathcal{M}_0 := \{u \in Y : \|u\| = \varrho\}.$$

Giả sử phiếm hàm $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\inf_{u \in Z} F(u) > \max_{u \in \mathcal{M}_0} F(u).$$

Nếu F thỏa mãn điều kiện (PS) thì với

$$\alpha := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \mathcal{M}} F(\gamma(u))$$

trong đó

$$\Gamma := \{\gamma \in C(\mathcal{M}, X) : \gamma|_{\mathcal{M}_0} = I\}$$

ta khẳng định được α là một điểm tới hạn của phiếm hàm F.

3.3 Sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.1)

3.3.1 Một số ký hiệu

Ký hiệu

$$\mathbf{U} = (u, v) \quad , \quad -\Delta\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Khi đó bài toán đang xét được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{U} &= \mathbf{AU} + \nabla F(x, \mathbf{U}) \text{ trong } \Omega, \\ \mathbf{U} &= 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3.2 Nghiệm yếu của bài toán (3.1)

Ta nhắc lại một số ký hiệu. Ký hiệu $|\cdot|_p$ là chuẩn trong không gian $L^p(\Omega)$, ngoài ra ta ký hiệu

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x}$$

và

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}$$

lần lượt là tích trong và chuẩn trong không gian $H_0^1(\Omega)$. Ký hiệu không gian

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Trong không gian $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ta sử dụng

$$\langle \mathbf{U}, \Phi\rangle = \langle u, \phi\rangle + \langle v, \psi\rangle$$

và

$$\|\mathbf{U}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

với $\mathbf{U} = (u, v)$ và $\Phi = (\phi, \psi)$ lần lượt để chỉ tích trong và chuẩn.

Xét phiếm hàm $J : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \mathbf{AU}\cdot\mathbf{U}\right) d\mathbf{x} - \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \, d\mathbf{x}$$

$$= Q(\mathbf{U}) - \int_\Omega F(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Từ định lý Krasnoselskii ta suy ra phiếm hàm $Q(\mathbf{U}) \in C^1(\mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Bổ đề 3.7. *Với giả thiết* $(\mathbf{F_0})$ *thì phiếm hàm*

$$\mathcal{F}(U) = \int_\Omega F(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

thuộc $C^1(\mathbb{H}_0^1(\Omega))$ *với đạo hàm xác định như sau*

$$\mathrm{d}\mathcal{F}(\mathbf{U})(\widetilde{\mathbf{U}}) = \int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega g(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

ở đây $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{u},\widetilde{v})$.

Chứng minh. Để chứng minh $\mathcal{F}$ khả vi tại $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ta cần phải đánh giá biểu thức

$$\delta(\widetilde{\mathbf{U}}) = \mathcal{F}(\mathbf{U}+\widetilde{\mathbf{U}}) - \mathcal{F}(\mathbf{U}) - \int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega g(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\delta(\widetilde{\mathbf{U}}) &= \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{\mathrm{d}t} F(\mathbf{x},\mathbf{U}+t\widetilde{\mathbf{U}})\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega g(\mathbf{x},\mathbf{U})\,\widetilde{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= \int_0^1 \left(\int_\Omega \Big(f(\mathbf{x},\mathbf{U}+t\widetilde{\mathbf{U}}) - f(\mathbf{x},\mathbf{U}) \Big)\,\widetilde{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right)\mathrm{d}t +\\ &\quad \int_0^1 \left(\int_\Omega \Big(g(\mathbf{x},\mathbf{U}+t\widetilde{\mathbf{U}}) - g(\mathbf{x},\mathbf{U}) \Big)\,\widetilde{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder ta đi đến

$$\begin{aligned}|\delta(\widetilde{U})| \le &\int_0^1 \left(\left| f(\cdot,\mathbf{U}+t\widetilde{\mathbf{U}}) - f(\cdot,\mathbf{U}) \right|_{\frac{2N}{N+2}} |\widetilde{u}|_{\frac{2N}{N-2}} \right)\mathrm{d}t +\\ &\int_0^1 \left(\left| g(\cdot,\mathbf{U}+t\widetilde{\mathbf{U}}) - g(\cdot,\mathbf{U}) \right|_{\frac{2N}{N+2}} |\widetilde{v}|_{\frac{2N}{N-2}} \right)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Từ định lý nhúng Sobolev, phép nhúng

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$$

là liên tục nên phép nhúng

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$$

cũng liên tục. Do đó khi $\widetilde{\mathbf{U}} \to \mathbf{0}$ trong $H_0^1(\Omega)$ thì

$$\mathbf{U} + t\widetilde{\mathbf{U}} \to \mathbf{U} \quad \text{trong} \quad L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega). \tag{3.5}$$

Từ điều kiện ($\mathbf{F_0}$) ta thấy

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{U})| + |g(\mathbf{x}, \mathbf{U})| \le a(|u| + |v|)^\sigma + b \le 2^{\frac{\sigma}{2}} a |\mathbf{U}|^\sigma + b.$$

Hơn nữa, từ tính liên tục của toán tử Nemitskii ta suy ra

$$f(\cdot, \mathbf{U} + t\widetilde{\mathbf{U}}) \to f(\cdot, \mathbf{U}) \text{ trong } L^{\frac{\frac{2N}{N-2}}{\sigma}}.$$

Nhưng do

$$\frac{2N}{N+2} \le \frac{\frac{2N}{N-2}}{\sigma}$$

nên ta suy ra

$$f(\cdot, \mathbf{U} + t\widetilde{\mathbf{U}}) \to f(\cdot, \mathbf{U}) \text{ trong } L^{\frac{2N}{N+2}}. \tag{3.6}$$

Từ (3.4) và (3.6) ta suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{|\delta(\widetilde{\mathbf{U}})|}{\|\widetilde{\mathbf{U}}\|} &\le \text{const} \cdot \frac{|\delta(\widetilde{\mathbf{U}})|}{|\widetilde{\mathbf{U}}|_{\frac{2N}{N-2}}} \\
&\le \text{const} \cdot \int_0^1 |f(\cdot, \mathbf{U} + t\widetilde{\mathbf{U}}) - f(\cdot, \mathbf{U})|_{\frac{2N}{N+2}} \mathrm{d}t + \\
&\quad \text{const} \cdot \int_0^1 |g(\cdot, \mathbf{U} + t\widetilde{\mathbf{U}}) - g(\cdot, \mathbf{U})|_{\frac{2N}{N+2}} \mathrm{d}t \qquad \to 0
\end{aligned}$$

khi $\|\widetilde{\mathbf{U}}\| \to 0$. Từ định lý hội tụ trội Lebesgue ta suy ra phiếm hàm $\mathcal{F}$ khả vi Frechét tại $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_0^1$ với đạo hàm xác định như sau

$$\mathrm{d}\mathcal{F}(\mathbf{U})(\widetilde{\mathbf{U}}) = \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathbf{U})\, \widetilde{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega g(\mathbf{x}, \mathbf{U})\, \widetilde{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Cuối cùng, để chứng minh tính liên tục của $d\mathcal{F}(\mathbf{U})$ ta cần chỉ ra rằng nếu $\mathbf{U}_n \to \mathbf{U}$ trong $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ thì

$$\sup_{\|(\widetilde{u}, \widetilde{v})\| \le 1} \left| \int_\Omega (f(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - f(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega (g(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - g(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \right|$$

tiến đến 0 khi $n \to +\infty$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Hölder ta thu được

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega} (f(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - f(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} (g(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - g(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\right| \\
&\le \left|\int_{\Omega} (f(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - f(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\right| + \left|\int_{\Omega} (g(\mathbf{x}, \mathbf{U}_n) - g(\mathbf{x}, \mathbf{U}))\, \widetilde{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\right| \\
&\le |f(\cdot, \mathbf{U}_n) - f(\cdot, \mathbf{U})|^{\frac{2N}{N+2}}_{\frac{2N}{N+2}} |\widetilde{u}|^{\frac{2N}{N-2}}_{\frac{2N}{N-2}} + |g(\cdot, \mathbf{U}_n) - g(\cdot, \mathbf{U})|^{\frac{2N}{N+2}}_{\frac{2N}{N+2}} |\widetilde{v}|^{\frac{2N}{N-2}}_{\frac{2N}{N-2}}.
\end{aligned}$$

Để ý rằng, từ định lý nhúng Sobolev, các tích phân sau đây hội tụ

$$\int_{\Omega} |\widetilde{u}(\mathbf{x})|^{\frac{2N}{N-2}}\, \mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty \quad , \quad \int_{\Omega} |\widetilde{v}(\mathbf{x})|^{\frac{2N}{N-2}}\, \mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty$$

hơn nữa còn bị chặn đều theo $\widetilde{\mathbf{U}}$ (do $\|\widetilde{\mathbf{U}}\| \le 1$). Tương tự như (3.5) và (3.6) chúng ta nhận được

$$|f(\cdot, \mathbf{U}_n) - f(\cdot, \mathbf{U})|_{\frac{2N}{N+2}} \to 0 \quad , \quad |g(\cdot, \mathbf{U}_n) - g(\cdot, \mathbf{U})|_{\frac{2N}{N+2}} \to 0$$

khi $\mathbf{U}_n \to \mathbf{U}$ trong $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Bổ đề được chứng minh. ■

Từ kết quả của bổ đề trên ta đi đến

Bổ đề 3.8. *Phiếm hàm J thuộc lớp $C^1(\mathbb{H}^1_0(\Omega))$.*

Với $\mathbf{U} = (u, v)$ và $\Phi = (\phi, \psi)$ ta có

$$\mathrm{d}J(\mathbf{U})(\Phi) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \phi + \lambda u\phi + \delta u\phi)\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{U})\, \phi\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} (\nabla v \nabla \psi + \lambda v\psi + \delta v\psi)\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \mathbf{U})\, \psi\, \mathrm{d}\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Cặp $(u, v) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán nếu các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \phi + \lambda u\phi + \delta u\phi)\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, u, v)\, \phi\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \\
&\int_{\Omega} (\nabla v \nabla \psi + \lambda v\psi + \delta v\psi)\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, u, v)\, \psi\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0
\end{aligned}$$

đúng với mọi $\phi, \psi \in H^1_0(\Omega)$.

Từ các lập luận trên ta thấy nghiệm yếu $\mathbf{U} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ của bài toán đang xét là điểm tới hạn của phiếm hàm J. Tức là $\mathbf{U}$ phải thỏa mãn

$$\mathrm{d}J(\mathbf{U})(\Phi) = 0 \quad , \quad \forall \Phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Đối với hàm F, ta giả thiết rằng

$$\lim_{|\mathbf{U}| \to +\infty} \frac{\nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{|\mathbf{U}|} = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2 \qquad (\mathbf{F_1})$$

đều theo $\mathbf{x}$.

Ta nhớ lại rằng, toán tử $-\Delta$ có dãy các giá trị riêng

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

tương ứng với nó là dãy các hàm riêng $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$. Với $\mathbf{U} = (u, v) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ trong đó $u = \sum u_j \varphi_j$ và $v = \sum v_j \varphi_j$, ta gọi $z_j = (u_j, v_j) \in \mathbb{R}^2$ là tọa độ thứ j của $\mathbf{U}$, như vậy ta có thể viết $\mathbf{U} = \sum z_j \varphi_j$. Với ký hiệu như trên, nếu w_j là tọa độ thứ j của Φ, tức là $\Phi = \sum w_j \varphi_j$, thì ta hiểu

$$\langle \mathbf{U}, \Phi \rangle = \sum z_j \cdot w_j.$$

Đối với bài toán đang xét, hệ

$$-\Delta \mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad , \quad \mathbf{U} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

được gọi là hệ tuyến tính hóa của bài toán.

Bổ đề 3.9. *Nếu λ_j là giá trị riêng của ma trận A tương ứng với véc tơ riêng $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ thì $\mathbf{U} = (x_1\phi_j, x_2\psi_j) \neq (0, 0)$ là một nghiệm của hệ tuyến tính hóa.*

Chứng minh. Giả sử $z_j = (u_j, v_j)$ là tọa độ của $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Khi đó $\mathbf{U}$ là nghiệm của hệ tuyến tính hóa khi và chỉ khi

$$\lambda_j z_j = A z_j$$

với mọi j. Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Hệ quả 3.6. *Nếu mọi λ_j đều không phải là giá trị riêng của ma trận A thì hệ tuyến tính hóa chỉ có nghiệm tầm thường $\mathbf{U} = (0, 0)$.*

Giả sử $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó ta có thể xác định ánh xạ tuyến tính $i : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ như sau

$$i\left(\sum w_j \varphi_j\right) = \sum (kw_j)\,\varphi_j.$$

Rõ ràng nếu k là một đẳng cấu từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ thì $i : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ cũng là một đẳng cấu. Hơn nữa, nếu k là một ánh xạ unita thì i là một toán tử unita.

Giả sử dạng ma trận của k là

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.$$

Khi đó nếu $z_j = kw_j$ thì

$$z_j = (x_1\phi_j + y_1\psi_j, x_2\phi_j + y_2\psi_j) = x\phi_j + y\psi_j$$

và do đó

$$i\,(\phi, \psi) = (x_1\phi + y_1\psi, x_2\phi + y_2\psi) = x\phi + y\psi.$$

Bổ đề 3.10. *Tồn tại đẳng cấu $i : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, hằng số $\mu > 0$ và các không gian con V, M, W của $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ trực nhau với nhau sao cho $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = V \oplus M \oplus W$ và*

$$\begin{aligned} (Q \circ i)\,(\Phi) &\le -\mu \left\|\Phi\right\|^2, && \forall \Phi \in V, \\ (Q \circ i)\,(\Phi) &= 0, && \forall \Phi \in M, \\ (Q \circ i)\,(\Phi) &\ge \mu \left\|\Phi\right\|^2, && \forall \Phi \in W. \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu $M \ne \{(0,0)\}$ thì tồn tại λ_j nào đó là giá trị riêng của A.

Chứng minh. Với $\alpha \in \mathbb{R}$ ta ký hiệu H_α^-, H_α^0, H_α^+ lần lượt là các không gian con của $H_0^1(\Omega)$ sao cho dạng toàn phương

$$u \mapsto \left\|u\right\|^2 - \alpha \left|u\right|_2^2$$

lần lượt là xác định âm, đồng nhất không và xác định dương.

Giả sử ξ và η là các giá trị riêng của ma trận A, tức là

$$\xi = \frac{\lambda+\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda-\gamma}{2}\right)^2 + \delta^2} \quad , \quad \eta = \frac{\lambda+\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda-\gamma}{2}\right)^2 + \delta^2}.$$

Giả sử $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$ sao cho $Ax = \xi x$ và $Ay = \eta y$ ở đây ta chọn x và y sao cho $x \cdot y = 0$ và $|x| = |y| = 1$. Với cách chọn này toán tử $i : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ xác định bởi

$$i\,(\phi, \psi) = x\phi + y\psi \tag{3.7}$$

là một đẳng cấu. Ngoài ra

$$\|i\,(\phi,\psi)\|^2 = \|x\phi + y\psi\|^2 = \|x_1\phi + y_1\psi\|^2 + \|x_2\phi + y_2\psi\|^2 = \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2$$

nên i là toán tử unita. Hơn nữa, với $\Phi = (\phi, \psi)$ thì

$$(Q \circ i)(\Phi) = \frac{1}{2}\left(\|\psi\|^2 - \xi\,|\psi|_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|\phi\|^2 - \eta\,|\phi|_2^2\right).$$

Vậy ta chọn

$$V = H_\xi^- \times H_\eta^- \quad , \quad M = H_\xi^0 \times H_\eta^0 \quad , \quad W = H_\xi^+ \times H_\eta^+.$$

Ta sẽ kiểm tra các khẳng định trong bổ đề. Thật vậy,

- nếu $\Phi \in V$ thì $\phi \in H_\xi^-$ và $\psi \in H_\eta^-$. Điều này có nghĩa là các dạng toàn phương

  $$u \mapsto \|u\|^2 - \xi\,|u|_2^2 \quad , \quad u \mapsto \|u\|^2 - \eta\,|u|_2^2$$

  xác định âm. Khi đó tồn tại hằng số $\mu_1 > 0$ nào đó sao cho

  $$\|\phi\|^2 - \xi\,|\phi|_2^2 \le \mu_1\,\|\phi\|^2 \quad , \quad \|\psi\|^2 - \eta\,|\psi|_2^2 \le \mu_1\,\|\psi\|^2.$$

  Vậy

  $$(Q \circ i)\,(\Phi) \le -\mu_1\,\|\Phi\|^2 \quad , \quad \forall \Phi \in V.$$

- Nếu $\Phi \in M$ thì $\phi \in H_\xi^0$ và $\psi \in H_\eta^0$. Điều này có nghĩa là các dạng toàn phương

  $$u \mapsto \|u\|^2 - \xi\,|u|_2^2 \quad , \quad u \mapsto \|u\|^2 - \eta\,|u|_2^2$$

  đồng nhất 0. Khi đó

$$\|\phi\|^2 - \xi\,|\phi|_2^2 = 0 = \|\psi\|^2 - \eta\,|\psi|_2^2\,.$$

Vậy

$$(Q \circ i)\,(\Phi) = 0 \quad , \quad \forall \Phi \in M.$$

- nếu $\Phi \in W$ thì $\phi \in H_\xi^+$ và $\psi \in H_\eta^+$. Điều này có nghĩa là các dạng toàn phương

$$u \mapsto \|u\|^2 - \xi\,|u|_2^2 \quad , \quad u \mapsto \|u\|^2 - \eta\,|u|_2^2$$

xác định dương. Khi đó tồn tại hằng số $\mu_2 > 0$ nào đó sao cho

$$\|\phi\|^2 - \xi\,|\phi|_2^2 \geq \mu_2\,\|\phi\|^2 \quad , \quad \|\psi\|^2 - \eta\,|\psi|_2^2 \geq \mu_2\,\|\psi\|^2\,.$$

Vậy

$$(Q \circ i)\,(\Phi) \geq -\mu_2\,\|\Phi\|^2 \quad , \quad \forall \Phi \in W.$$

Kết hợp lại ta chọn $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. ■

Bổ đề 3.11. *Không gian con V là hữu hạn chiều.*

Chứng minh. Từ cách xây dựng không gian V ở Bổ đề 3.10 và bất đẳng thức Poincaré ta chỉ cần chỉ ra không gian H_α^- hữu hạn chiều với $\alpha > 0$, tức là hình cầu đơn vị trong H_α^- là tập compắc.

Xét dãy $\{u_n\}_n \subset H_\alpha^-$ nằm trong hình cầu đơn vị. Do $H_\alpha^- \subset H_0^1$ nên $\{u_n\}_n$ bị chặn trong H_0^1. Vì H_0^1 phản xạ nên ta suy ra tồn tại dãy con $\{u_{n_m}\}_m$ hội tụ yếu đến $u \in H_0^1$. Vì phép nhúng $H_0^1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ là compắc nên dãy $\{u_{n_m}\}_m$ hội tụ mạnh đến u trong L^2.

Vì dạng toàn phương $u \mapsto \|u\|^2 - \alpha\,|u|_2^2$ xác định âm trên H_α^- nên

$$|\nabla u|_2 \leq \sqrt{\alpha}\,|u|_2 \quad , \quad \forall u \in H_\alpha^-.$$

Vậy dãy $\{\nabla u_{n_m}\}_m$ bị chặn trong H_0^1 , tương tự như trên ta suy ra tồn tại dãy con $\{\nabla u_{n_{m_k}}\}_k$ hội tụ mạnh đến $v \in L^2$ trong L^2. Từ đây ta suy ra $\nabla u = v$ và hơn thế nữa $u \in H_\alpha^-$. Ta có điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 3.12. *Ánh xạ i thuộc lớp $C^1(\mathbb{H}_0^1(\Omega)\,; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.*

Chứng minh. Xét $\Phi = (\phi, \psi)$ và $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})$. Từ (3.7) ta suy ra

$$\begin{aligned} i(\Phi + \widetilde{\Phi}) - i(\Phi) &= i(\phi + \widetilde{\phi}, \psi + \widetilde{\psi}) - i(\phi, \psi) \\ &= i(\phi, \widetilde{\psi}) + i(\widetilde{\phi}, \psi) + i(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}). \end{aligned}$$

Do i tuyến tính nên i liên tục tại $(0, 0)$, điều đó dẫn đến

$$\|i(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})\| \le \mathrm{const} \cdot \|\widetilde{\phi}\| \|\widetilde{\psi}\|.$$

Vậy i khả vi tại Φ và

$$\mathrm{d}i(\Phi)(\widetilde{\Phi}) = i(\phi, \widetilde{\psi}) + i(\widetilde{\phi}, \psi).$$

Hơn nữa, $\mathrm{d}i(\Phi)$ còn liên tục tại Φ. ■

3.3.3 Sự tồn tại nghiệm

Giả sử

$$\frac{\lambda + \gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda - \gamma}{2}\right)^2 + \delta^2} \ne \lambda_j \quad , \quad \forall j. \tag{NR}$$

Bổ đề 3.13. *Với các giả thiết* $(\mathbf{F_1})$ *và* $(\mathbf{NR})$*, phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện Palais-Smale.*

Chứng minh. Giả sử $\{\mathbf{U_n}\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ là một dãy (PS), tức là $J(\mathbf{U_n})$ bị chặn và $\nabla J(\mathbf{U_n}) \to 0$ trong không gian $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Do ∇F thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{|\mathbf{U}| \to +\infty} \frac{\nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{|\mathbf{U}|} = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$$

đều theo $\mathbf{x}$ nên $\{\mathbf{U_n}\}$ chứa một dãy con bị chặn. Thật vậy giả sử ngược lại, tức là $\|\mathbf{U_n}\| \to +\infty$. Khi đó dãy

$$\widetilde{\mathbf{U}}_n := \frac{\mathbf{U_n}}{\|\mathbf{U_n}\|}$$

thỏa mãn $\|\widetilde{\mathbf{U}}_n\| = 1$. Do $H_0^1(\Omega)$ phản xạ và phép nhúng $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compắc nên (chính xác đến dãy con)

$$\widetilde{\mathbf{U}}_n \rightharpoonup \widetilde{\mathbf{U}} \text{ trong } \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

và

$$\widetilde{\mathbf{U}}_n \to \widetilde{\mathbf{U}} \text{ trong } \mathbb{L}^2(\Omega)$$

với $\widetilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ nào đó. Mặt khác

$$\begin{aligned}\frac{J(\mathbf{U_n})}{\|\mathbf{U_n}\|^2} &= Q\left(\widetilde{\mathbf{U}}_n\right) - \frac{1}{\|\mathbf{U_n}\|^2}\int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{U_n})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \int_\Omega A\widetilde{\mathbf{U}}_n \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_n\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right) - \frac{1}{\|\mathbf{U_n}\|^2}\int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{U_n})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned}$$

nên chuyển qua giới hạn ta được

$$0 = \frac{1}{2}\left(1 - \int_\Omega A\widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right).$$

Vậy

$$\widetilde{\mathbf{U}} \neq 0.$$

Mặt khác ta lại có

$$J'(\mathbf{U_n})\frac{H}{\|\mathbf{U_n}\|} = Q'(\widetilde{\mathbf{U}}_n)H - \frac{1}{\|\mathbf{U_n}\|}\int_\Omega \nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{U_n}) \cdot H\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

ở đây $H \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tùy ý. Bằng cách chuyển qua giới hạn được

$$Q'(\widetilde{\mathbf{U}})H = 0 \quad , \quad \forall H \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

tức là $\widetilde{\mathbf{U}}$ là một nghiệm của bài toán tuyến tính hóa. Điều này mâu thuẫn với sự kiện $\widetilde{\mathbf{U}} \neq 0$ và bài toán tuyến tính hóa chỉ có nghiệm tầm thường (Hệ quả 3.6). Mâu thuẫn này chứng tỏ phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện (PS). ∎

Sau đây chúng ta trình bày kết quả chính của chương.

Định lý 3.17. *Giả sử các điều kiện* (**NR**) *và* ($\mathbf{F_1}$) *được thỏa mãn. Khi đó bài toán* (3.1) *có ít nhất một nghiệm* $\mathbf{U} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Chứng minh. Nghiệm $\mathbf{U}$ của bài toán chính là điểm tới hạn của phiếm hàm

$$J(\mathbf{U}) = Q(\mathbf{U}) - \int_\Omega F(\mathbf{x}, \mathbf{U})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Rõ rằng việc tìm điểm tới hạn của J tương đương với việc tìm điểm tới hạn của phiếm hàm $I = J \circ i$ trong đó i là đẳng cấu được xác định bởi

$$i(\phi, \psi) = x\phi + y\psi,$$

trong đó x, y được chọn như trong chứng minh của Bổ đề 3.10. Một cách chi tiết, ta có

$$I(\varPhi) = (Q \circ i)(\varPhi) - \int_{\varOmega} \widetilde{F}(\mathbf{x}, \varPhi)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad , \quad \forall \varPhi = (\phi, \psi) \in \mathbb{H}_0^1(\varOmega)$$

trong đó $\widetilde{F} : \varOmega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau

$$\widetilde{F}(\mathbf{x}, \phi, \psi) = F(\mathbf{x}, x\phi + y\psi).$$

Ta thấy

$$\frac{\nabla F(\mathbf{x}, xs + yt)}{|xs + yt|} = \frac{\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x}, s, t)}{|xs + yt|} = \frac{\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x}, s, t)}{|(s, t)|} \quad , \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

nên từ điều kiện $(\mathbf{F_0})$ ta suy ra

$$\lim_{|(s,t)| \to +\infty} \frac{\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x}, s, t)}{|(s, t)|} = \mathbf{0}.$$

Điều này có nghĩa là

$$\lim_{|\mathbf{U}| \to +\infty} \frac{\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{|\mathbf{U}|} = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}. \qquad (\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}})$$

Bước cuối cùng ta sẽ kiểm tra các điều kiện của định lý điểm yên ngựa cho phiếm hàm I. Thật vậy

- Từ Bổ đề 3.8, Bổ đề 3.12 và tính khả vi liên tục của hàm hợp ta suy ra $I \in C^1(\mathbb{H}_0^1(\varOmega), \mathbb{R})$.
- Theo Bổ đề 3.11 thì $\dim V < +\infty$.
- Theo Bổ đề 3.13 và điều kiện $(\widetilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}})$ ta suy ra phiếm hàm I cũng thỏa mãn điều kiện (PS).
- Vì A không nhận bất kỳ λ_j nào làm giá trị riêng nên theo Bổ đề 3.10 ta có $M = \emptyset$, tức là $\mathbb{H}_0^1(\varOmega) = V \oplus W$. Hơn thế nữa, tồn tại $\mu > 0$ sao cho

$$(Q \circ i)(\Phi) \geq \mu \|\Phi\|^2 \quad , \quad \forall \Phi \in W,$$

và

$$(Q \circ i)(\Phi) \leq -\mu \|\Phi\|^2 \quad , \quad \forall \Phi \in N.$$

Từ điều kiện $(\widetilde{\mathbf{F}}_0)$ ta suy ra với mỗi $\varepsilon > 0$ đủ bé đều tồn tại C_ε sao cho

$$|\widetilde{F}(\mathbf{x}, \mathbf{U})| \leq \varepsilon |\mathbf{U}|^2 + C_\varepsilon \quad , \quad \forall x \in \Omega \quad , \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= (Q \circ i)(\Phi) - \int_\Omega \widetilde{F}(\mathbf{x}, \Phi)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\geq -\varepsilon \int_\Omega |\Phi|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} - C_\varepsilon |\Omega| \end{aligned}$$

với bất kỳ $\Phi \in W$. Hơn thế nữa, khi $\Phi \in V$ thì

$$-\mu \|\Phi\|^2 \geq I(\Phi).$$

Từ đây ta thấy

$$\inf_W I(\Phi) \geq \max_{\substack{V \\ \|\Phi\| \text{ đủ lớn}}} I(\Phi).$$

Cuối cùng sự tồn tại điểm tới hạn của phiếm hàm I được suy ra từ định lý điểm yên ngựa. Và ta kết thúc chứng minh của định lý ở đây. ■

3.4 Phương trình Biharmonic

Trong mục này chúng ta nêu ra một ví dụ áp dụng. Xét phương trình Biharmonic với điều kiện biên Navier sau đây

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= \delta u + f(\mathbf{x}, \Delta u) \text{ trong } \Omega, \\ u &= \Delta u = 0 \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nếu ký hiệu $v = -\Delta u$ thì (3.8) được viết thành

$$\begin{aligned} -\Delta u &= v \text{ trong } \Omega, \\ -\Delta v &= \delta u + f(\mathbf{x}, -v) \text{ trong } \Omega, \\ u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Do đó với ký hiệu $\mathbf{U} = (u, v)$ thì (3.9) trở thành

$$-\Delta \mathbf{U} = A\mathbf{U} + \nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{U})$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$\nabla F(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{x}, -v) \end{pmatrix}.$$

Ta thấy nếu $\delta > 0$ và $\delta \neq \lambda_j^2$ với mọi j thì điều kiện (**NR**) đúng. Ta đi đến kết quả sau

Định lý 3.18. *Giả thiết $\delta > 0$. Đặt*

$$F(\mathbf{x}, s, t) = \int_0^t f(\mathbf{x}, -\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Nếu F thỏa mãn điều kiện $(\mathbf{F_1})$ và $\delta \neq \lambda_j^2$ với mọi j thì bài toán (3.8) *có nghiệm $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ với $\Delta u \in H_0^1(\Omega)$.*